به نام خدا

سوالات امتحان درس جبر خطّی — خرداد ۱۳۸۵

جعفر ریخته‌گرزاده ـ دانشگاه اراک

---

۱) قضیه: هر فضای برداری متناهی‌البعد که مولّد متناهی داشته باشد، مبنا دارد.

۲) قضیه: رتبهٔ هر تبدیل خطّی با رتبهٔ ماتریس آن تبدیل خطّی برابر است.

۳) قضیه: اگر ماتریس یک تبدیل خطّی در یک زوج مبنا A فرض شود و ماتریس همان تبدیل خطّی در زوج مبنای دیگر B فرض شود آنگاه ماتریس‌های معکوس‌پذیر P و Q وجود دارند که $B = Q^{-1}AP$.

۴) قضیه: هر ماتریس در معادلهٔ مشخّصهٔ خود صدق می‌کند.

۵) اگر ماتریس تبدیل T نسبت به مبنای

$$\{\vec{u}_1 = (8, -6, 7), \vec{u}_2 = (-16, 7, -13), \vec{u}_3 = (9, -3, 7)\}$$

دارای ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس T را در مبنای ذیل به دست آورید.

$$\{\vec{v}_1 = (1, -2, 1), \vec{v}_2 = (3, -1, 2), \vec{v}_3 = (2, 1, 2)\}$$

۶) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض باشد بردارهای خاص و مقادیر خاص در صورت وجود ماتریس P را به قسمی تعین کنید که $P^{-1}AP$ قطری باشد.

۷) بدون بسط، دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$$

۸) اگر فضای C^3 مجهّز به یک قانون ضرب داخلی باشد، یک مبنای متعامد نرمال از روی مبنای زیر به دست آورید.

$$B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, i), \vec{e}_2 = (0, -i, 1), \vec{e}_3 = (i, i, 0)\}$$

به نام خدا

سوالات امتحان درس جبر خطّی – دی ۱۳۸۴

جعفر ریخته‌گرزاده - دانشگاه اراک

---

۱) قضیه(تعویض مبنا برای فرم‌های خطّی): فرض کنیم $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ مبنایی برای فضای V باشد و مبنای جفت آن $B'_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ برای $\hat{V}$ باشد و $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ مبنای دیگر V و جفت آن $B'_2 = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ باشد، چه رابطه‌ای بین ماتریس‌های تغییر مبنای B_1 به B_2 و B'_1 به B'_2 موجود است. آن را ثابت کنید.

۲) قضیه: ثابت کنید رتبهٔ هر تبدیل خطّی با رتبهٔ ماتریس آن برابر است.

۳) قضیه: هرمجموعه از بردارهای مستقل خطّی را می‌توان به یک مبنا برای تمام فضا توسیع داد.

۴) ثابت کنید $dimL(U, V) = m \times n$. که $dimU = m$ و $dimV = n$.

۵) ثابت کنید معکوس ماتریس زیر، دارای درایه‌های صحیح است.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-2} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

۶) ماتریس $A_{۳\times۳}$ چنان است که مقادیر خاص آن ۱و۲و۳ است. نظیر این مقادیر خاص، بردارهای خاص به ترتیب $(۱,۲,۳)$ و $(۱,۲,۱)$ و $(۳,۲,۱)$ می‌باشد. ماتریس A را تعیین کنید.

۷) یک مبنای متعامد نرمال از روی مبنای

$$\{\vec{u}_۱ = (۱, i, ۰), \vec{u}_۲ = (۱, ۰, -i), \vec{u}_۳ = (۰, ۱, i)\}$$

در $C^۳$ بسازید.

۸) دترمینان ماتریس زیر را حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & \cdots & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & x & \cdots & x & x \\ ۱ & x & ۰ & \cdots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ ۱ & x & x & \cdots & ۰ & x \\ ۱ & x & x & \cdots & x & ۰ \end{bmatrix}$$

به نام خدا

سوالات امتحان درس جبر خطّی — خرداد ۱۳۸۴

جعفر ریخته‌گرزاده - دانشگاه اراک

---

۱) قضیه: اگر M و N دو زیرفضای V باشند، ثابت کنید

$$dimM + dimN = dim(M + N) + dim(M \cap N)$$

۲) اگر A و B ماتریس‌های تبدیل خطّی $T : U \to V$ نسبت به دو زوج‌مبنای متفاوت باشند، ثابت کنید ماتریس‌های نامنفرد(معکوس‌پذیر) H و K به قسمی موجودند که $B = K^{-۱}AH$.

۳) ثابت کنید هر ماتریس در معادلهٔ مشخّصهٔ خود صدق می‌کند.

۴) دو بردار متعامد نرمال از روی بردارهای

$$\{\vec{u}_1 = (0, 1, -i, 0), \vec{u}_2 = (i, 0, 1, 0)\}$$

در C^4 به دست آورید.

۵) ماتریس‌های نامنفرد H و K را به قسمی به دست آورید که $H^{-1}AK$ به فرم کانونی $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

٦) دترمینان ماتریس زیر را حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{bmatrix}$$

۷) برای ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مقادیر خاص و بردارهای خاص را به دست آورده و ماتریس معکوس‌پذیر P را به قسمی تعیین کنید که $P^{-1}AP$ قطری باشد.

$http://engmmajidee.blogfa.com$

تهیه شده توسط فارسی‌تک