به نام خدا

سوالات امتحان درس آنالیز ریاضی ۱ ـ ۲۸ خرداد ۱۳۸۵

دکتر باقر نشوادیان‌بخش ـ دانشگاه اراک

تذکّر: سوالات دسته‌های الف و ب برای دانشجویانی است که می‌خواهند تمام درس را امتحان دهند و سوالات دسته‌های ب و ج برای سایر دانشجویان است.

الف۱. ثابت کنید در هر فضای متری اشتراک تعداد متناهی مجموعهٔ باز، باز است و از آن نتیجه بگیرید که اجتماع تعداد متناهی مجموعهٔ بسته، بسته است.

الف۲. فرض کنید $K \subseteq Y \subseteq X$. ثابت کنید K نسبت به فضای متری X فشرده است اگروتنهااگر K نسبت به زیرفضای Y فشرده باشد.

الف۳. مثال‌های زیر را در R بدون توضیح ارائه دهید.

یک مجموعهٔ فشردهٔ شمارا، یک مجموعهٔ کاملِ غیر فشرده، یک مجموعهٔ بی‌کران و بسته که تنها یک نقطهٔ حدّی دارد.

الف۴. فرض کنید E یک مجموعهٔ فشرده در فضای متری (X,d) باشد. ثابت کنید نقاط x و y در E وجود دارند به طوری که diam E = d(x,y)

ب۱. با فرض $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. ثابت کنید $lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. سپس $lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n+2})^{n+1}$ را حساب کنید.

ب۲. X و Y فضاهای متری و $f : X \to Y$. ثابت کنید گزاره‌های زیر دوبه‌دو هم‌ارزند:

a) f روی X پیوسته است.

b) به ازای هر زیرمجموعهٔ B ازY، $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

c) به ازای هر زیرمجموعهٔ A از X، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

فقط ترتیب اثبات به صورت $a \leftarrow c \leftarrow b \leftarrow a$ پذیرفته می‌شود.

ب۳. فرض کنید تابع حقیقی f روی مجموعهٔ کراندار $E \subseteq R$ پیوستهٔ یکنواخت باشد. ثابت کنید f روی E کراندار است. مثالی از تابعی بیاورید که روی مجموعهٔ بی‌کرانی، پیوستهٔ یکنواخت باشد ولی f کراندار نباشد (با توضیات لازم)

ج۱. فرض کنید X یک فضای متری و $f : X \to R^k$.

اوّلاً: ثابت کنید $\underline{f}$ در $p \in X$ پیوسته است اگروتنهااگر هر یک از مولّفه‌های $\underline{f}$ در p پیوسته باشند.

ثانیاً: اگر $\underline{f}$ و $\underline{g}$ توابع پیوسته‌ای از X به توی R^k باشند، ثابت کنید $\underline{f} \cdot \underline{g}$ روی X پیوسته است.

ج ۲. $[a,b] \subseteq R$ و f و g دو تابع حقیقی پیوسته روی $[a,b]$ هستند. اگر $f(a) < g(a)$ و $f(b) > g(b)$ ، ثابت کنید$x_\circ \in (a,b)$ وجود دارد که $f(x_\circ) = g(x_\circ)$

ج ۳.

اوّلاً: f یک تابع پیوسته از فضای متری X به توی Y است. اگر$E \subseteq X$ همبند باشد، ثابت کنید $f(E)$ همبند است.

ثانیاً: فرض کنید f یک تابع حقیقی پیوسته غیر ثابت روی R باشد. ثابت کنید برد f ناشماراست.

ج ۴. فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $E \subseteq N(a,r) \subseteq X$. تابع f را روی X با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم: $\quad (x \in X) \qquad f(x) = \sup_{p\in E} d(x,p)$

توضیح دهید که f خوش‌تعریف است و ثابت کنید f روی X پیوستهٔ یکنواخت است.

به نام خدا

سوالات امتحان میان‌ترم آنالیز ریاضی ۱ — ۱۰ اردیبهشت ۱۳۸۵

دکتر باقر نشوادیان‌بخش - دانشگاه اراک

---

۱) الف) اگر p یک نقطهٔ حدّی E باشد، ثابت کنید هر همسایگی p بینهایت از عناصر p را در بردارد.

ب) در چه مواقعی یک مجموعهٔ نامتناهی نقطهٔ حدّی دارد(بدون اثبات).

۲) فرض کنید $E \subseteq R$ نامتناهی و کراندار باشد. ثابت کنید E' ابتدا و انتها دارد.

۳) (X,d) فضای متری، $K \subseteq X$ فشرده و $E = K^c$.

الف) ثابت کنید به ازای هر $p \in E$،

$$\inf_{x\in K} d(x,p) > \circ$$

ب) فرض کنید $p \in E$ و $\alpha = \inf\ d(x,p)$. قرار می‌دهیم

$$K_n = \{x \in K : d(x,p) \le \alpha + \tfrac{1}{n}\} \ , \quad n = ۱,۲,۳,...$$

ثابت کنید هر K_n ناتهی و بسته است و $\cup_{n=1}^{\infty} K_n \neq \phi$. سپس نتیجه بگیرید که عضوی از K مانند $x_\circ$ وجود دارد به طوری که $\alpha = d(x_\circ, p)$.

۴) اگر E همبند باشد، ثابت کنید $\bar{E}$ نیز همبند است.

۵) فرض کنید در فضای متری (X,d)، دنبالهٔ $\{P_n\}$ همگرا به p باشد. اگر E برد دنباله باشد " فقط " به کمک تعریف فشردگی ثابت کنید $K = E \cup \{P\}$ فشرده است.

٦) الف) اگر $\{P_n\}$ دنبالهای در فضای متری فشردهٔ X باشد، ثابت کنید $\{P_n\}$ زیردنبالهای همگرا دارد.

ب) ثابت کنید هر دنبالهٔ کراندار در R^k زیردنبالهٔ همگرا دارد.

۷) اگر از مرتبهای به بعد $a_n \le b_n$، ثابت کنید $lim_{\overline{n\to\infty}} a_n \ \le \ lim_{\overline{n}\to\infty} b_n$.

به نام خدا

سوالات امتحان درس آنالیز ریاضی ۱ — ۱۷ دی ۱۳۸۴

دکتر باقر نشوادیانبخش - دانشگاه اراک

تذکّر: سوالات الف و ب برای دانشجویانی است که مایل نیستند نمرهٔ امتحان میانترمشان منظور شود. سوالات ب و ج برای سایر دانشجویان است.

الف۱. اگر A و B زیرمجموعههای ناتهی R باشند، ثابت کنید $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

الف۲. اگر X یک فضای متری و F یک زیرفضای کامل X باشد، ثابت کنید F بسته است.

الف۳. دنبالهٔ $\{P_n\}$ در فضای متری X همگرا به p است، ثابت کنید $E = \{P_n : n \in J\} \cup \{p\}$ فشرده است.

الف۴. دنبالهٔ $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ از اعداد حقیقی مفروض است. دنبالهٔ $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ را با ضابطهٔ $\sigma_n = \frac{S_0+S_1+\dots+S_n}{n+1}$ تعریف میکنیم.

اوّلاً: اگر $S_n \to s$. ثابت کنید $\sigma_n \to s$.

ثانیاً: به ازای هر $n \ge 1$ قرار میدهیم $a_n = s_n - s_{n-1}$. ثابت کنید $\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} ka_k = s_n - \sigma_n$ سپس فرض کنید $lim_{n\to\infty} na_n = 0$ و σ_n همگرا باشد، ثابت کنید s_n همگراست.

ب۱. اگر $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ، ثابت کنید $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

ب۲. ثابت کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ به ازای هر x همگراست ولی به ازای هیچ xای همگرای مطلق نیست.

ب۳. فرض کنید تابع حقیقی f روی Q(مجموعهٔ اعداد گویا) پیوستهٔ یکنواخت باشد. اگر به ازای هر عدد حقیقی x، $g(x) = \lim_{t\to x} f(t)$ وجود داشته باشد، ثابت کنید تابع g که به این ترتیب تعریف می‌شود روی R پیوستهٔ یکنواخت است.

ب۴. فرض کنید تابع حقیقی f روی (a,b) پیوستهٔ یکنواخت باشد، ثابت کنید $f(a+)$ وجود دارد.

ب۵. فرض کنید X و Y و Z فضاهی متری باشند که Y فشرده است. نگاشت $f : X \to Y$ و نگاشت ۱—۱ و پیوستهٔ $g : Y \to Z$ نیز روی X پیوستهٔ یکنواخت است.

ج۱. f و g دو تابع حقیقی پیوسته روی فضای متری X هستند.

اوّلاً: ثابت کنید $F = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ در X بسته است.

ثانیاً: اگر A در X چگال باشد و به ازای هر $x \in A$ ، $f(x) \leq g(x)$ ، ثابت کنید به ازای هر $x \in X$ ، $f(x) \leq g(x)$.

ج۲. فرض کنید $S = \{x^۲ + x + ۱ : x \in [۱,۵]\}$. ثابت کنید S همبند و فشرده است.

ج۳. فرض کنید $E \subseteq R$ فشرده باشد، اگر گراف $f : E \to R$ فشرده باشد، ثابت کنید f روی E پیوسته است.

ج۴. تابع حقیقی f روی فضای متری فشردهٔ X پیوسته است. اگر به ازای هر $x \in X$ نقطه‌ای مانند y در X وجود داشته باشد به طوری که $| f(y) | \leq \frac{۱}{۲} | f(x) |$ ، ثابت کنید $x_\circ \in X$ وجود دارد که $f(x) = \circ$.

راهنمایی:

روش اوّل: تابع $| f |$ (یا $f^۲$) روی X پیوسته است ...

روش دوم: $x_۱ \in X$ را اختیار می‌کنیم. $x_۲$ وجود دارد که $| f(x_۲) | \leq \frac{۱}{۲} | f(x_۱) |$ ...

ج۵. نگاشت $f : X \to Y$ روی X پیوسته است اگر $E \subseteq X$ همبند باشد. ثابت کنید $f(E)$ همبند است.

به نام خدا

سوالات امتحان میان‌ترم آنالیز ریاضی ۱ — ۱۶ آذر ۱۳۸۴

دکتر باقر نشوادیان‌بخش - دانشگاه اراک

---

۱) فرض کنید $G_۱, \ldots, G_n$ زیرمجموعه‌های باز فضای متری X باشند. ثابت کنید $\cap_{k=۱}^{n} G_k$ باز است..

با مثالی نشان دهید که اشتراک تعداد نامتناهی مجموعهٔ باز ممکن است باز نباشد(با توضیحات لازم)

۲) به سوالات زیر پاسخ دهید(دلیل لازم نیست)

الف) مجموعهٔ کاملی در R مثال بزنید که فشرده نباشد.

ب) در $R^۲$ مجموعه‌ای مثال بزنید که نه باز باشد و نه بسته.

ج) در $R^۲$ مجموعهٔ بسته‌ای مثال بزنید که فشرده نباشد.

د) مجموعه‌ای مانند E در R مثال بزنید که $\overline{E}$ همبند باشد ولی E همبند نباشد.

ه) در $R^۲$ مجموعه‌ای مثال بزنید که کراندار باشد و تمام نقاطش نقطهٔ حدّی مجموعه باشند.

و) مجموعه‌ای مانند E درR مثال بزنید که E' شمارا باشد ولی $(E')' = \phi$.

۳) اگر $\{K_n\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های فشردهٔ ناتهی در فضای متری X باشد به طوری که اشتراک هر زیرگردایهٔ متناهی آن ناتهی باشد، ثابت کنید $\cap K_\alpha$ ناتهی است.

۴) A و B زیرمجموعه‌های منفک (جدا از هم) در فضای متری X هستند. ثابت کنید A و B در زیرفضای $A \cup B$ بسته‌اند.

۵) فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ ناتهی فضای متری X باشد. اگر $p \in X$ و $d(p,a) = inf\{d(p,a) : a \in A\}$ ثابت کنید $\overline{A} = \{p \in X : d(p,A) = ۰\}$.

٦) اگر $P_n \to p$ ثابت کنید هر زیردنبالهٔ $\{P_n\}$ نیز همگرا به p است.

۷) اگر X یک فضای متری فشرده و $\{P_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی در X باشد، ثابت کنید $\{P_n\}$ در X همگراست.

۸) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty} \mid a_n \mid = \alpha$ و $\overline{\lim} a_n \neq \underline{\lim} a_n$. ثابت کنید $\alpha \neq ۰$ و $\overline{\lim} a_n = \alpha$.

———————————————————————————————

به نام خدا

سوالات امتحان میان‌ترم آنالیز ریاضی ۱ — ۱۲ اردیبهشت ۱۳۸۴

دکتر باقر نشوادیان‌بخش - دانشگاه اراک

———————————————————————————————

۱) A و B زیرمجموعه‌های R هستند. ثابت کنید A و B در R بسته‌اند اگروتنهااگر $A \times B$ در $R^۲$ بسته باشد.

۲) فرض کنید X یک فضای متری و $S \subseteq X$. ثابت کنید S در X چگال است اگروتنهااگر S هر زیرمجموعهٔ باز ناتهی X را قطع کند.

۳) K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ فضای متری X است. ثابت کنید R بسته است.

۴) ثابت کنید در فضای متری Q با متریک قدرمطلق، مجموعهٔ $E = Q \cap (\sqrt{۲}, \sqrt{۵})$ بسته و کراندار است ولی فشرده نیست.

۵) X یک فضای متری و $Y \subseteq X$. اگر $Y = A \cup B$، که در آن A و B ناتهی و مجزّا و هر دو در Y باز هستند، ثابت کنید Y همنبد نیست.

٦) فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های R^k باشند و $A+B = \{\underline{a}+\underline{b} : \underline{a} \in A \wedge \underline{b} \in B\}$. اگر A فشرده و B بسته باشد، ثابت کنید $A+B$ بسته است.

۷) فرض کنید $\{P_n\}$ دنباله‌ای در فضای متری X باشد. اگر N عددی طبیعی و $E_N = \{P_n : n > N\}$. ثابت کنید $\{P_n\}$ کوشی است اگروتنهااگر $diam\ E_N \to ۰$.

۸) فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد. اگر $\overline{lim}\ a_n = \alpha$ و c عدد حقیقی مثبتی باشد، ثابت کنید $\overline{lim}\ ca_n = c\alpha$.

$http://engmmajidee.blogfa.com$