به نام خدا

اثبات نیون برای گنگ بودن $\pi^۲$

ایوان نیون با استفاده از انتگرال‌های ریمان و به روش برهان خلف، گنگ بودن $\pi^۲$ را اثبات نموده است.

۱ لم.

اگر n یک عدد طبیعی باشد و تابع حقیقی f بر R به صورت $f(x) = \frac{۱}{n!}x^n(۱-x)^n$ تعریف شود آنگاه:

الف) برای هر $x \in (۰,۱)$؛ $۰ < f(x) < \frac{۱}{n!}$.

ب) برای هر عدد صحیح نامنفی k هر یک از اعداد حقیقی $f^{(k)}(۰)$ و $f^{(k)}(۱)$، یک عدد صحیح است.

برهان:

الف) فرض کنیم $x \in (۰,۱)$. چون $۱ > x^n > ۰$ و $۱ > (۱-x)^n > ۰$، لذا $\frac{۱}{n!} > \frac{۱}{n!}x^n(۱-x)^n > ۰$. پس الف برقرار است.

ب)

حالت اول: $k > ۲n$

با توجه به اینکه f یک تابع چندجمله‌ای از درجه $۲n$ است، لذا برای هر عدد حقیقی x؛ $f^{(k)}(x) = ۰$. پس در این حالت هر یک از $f^{(k)}(۰)$ و $f^{(k)}(۱)$ عدد صحیح صفر است.

حالت دوم: $n \leq k \leq ۲n$

قرار می‌دهیم $m = k - n$ در این صورت m یک عدد صحیح است و $۰ \leq m \leq n$. با توجه به تعریف f، برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{۱}{n!}(x - x^۲)^n \\ &= \tfrac{۱}{n!}\sum_{j=۰}^{n}\binom{n}{j}(-۱)^j x^{n-j}x^{۲j} \\ &= \tfrac{۱}{n!}\sum_{j=۰}^{n}\binom{n}{j}(-۱)^j x^{n+j} \end{aligned}$$

بنابراین برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \tfrac{1}{n!}\sum_{j=m}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j\tfrac{(n+j)!}{(n+j-k)!}x^{n+j-k} \\ &= \sum_{j=m}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j\tfrac{(n+j)!}{(n+j-k)!\ k!\ n!}x^{n+j-k} \\ &= \sum_{j=m}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j\binom{n+j}{k}\tfrac{k!}{n!}x^{n+j-k} \qquad (1) \end{aligned}$$

با توجه به رابطهٔ (۱)، هر یک از اعداد حقیقی $f^{(k)}(0)$ و $f^{(k)}(1)$ یک عدد صحیح است.

حالت سوم: $0 \leq k < n$

توابع حقیقی g و h بر R را به صورت $g(x) = \frac{1}{n!}x^n$ و $h(x) = (1-x)^n$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $f = gh$، پس طبق قاعدهٔ لایپ‌نیتزبرای هر عدد حقیقی x داریم:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}g^{(k-j)}(x)h^{j}(x)$$

واضح است که

$$\forall j \in \{0, 1, \cdots, k\}\ ;\ g^{k-j}(0) = 0\ ,\ h^{j}(1) = 0$$

لذا هر یک از $f^{(k)}(0)$ و $f^{(k)}(1)$ عدد صحیح صفر است.

۲ قضیه.

قضیه. عدد حقیقی π^2 یک عدد گنگ است.

برهان. فرض کنیم π^2 عددی گویا باشد(فرض خلف). در این صورت اعداد صحیح و مثبتی مانند a و b وجود دارند به‌طوری‌که $\pi^2 = \frac{a}{b}$.

دنباله‌های توابع حقیقی $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر R را به صورت

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$$

و

$$F_n(x) = b^n\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k f^{2k}(x)\pi^{2n-2k}$$

تعریف می‌کنیم. حال نشان می‌دهیم به ازای هر عدد طبیعی n:

الف) هر یک از اعداد $F_n(0)$ و $F_n(1)$ یک عدد صحیح است.

ب) $\pi^2 a^n f_n(x)\sin \pi x = \frac{d}{dx}[F'_n(x)\sin \pi x - \pi F_n \cos \pi x]$

ج) $F_n(1)+F_n(0)=\pi a^n\int_0^1 f_n(x)\sin\pi x dx$

فرض کنیم n یک عدد طبیعی باشد. با توجه به $\pi^2=\frac{a}{b}$، برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_n^{(2k)}(x)a^{n-k}b^k$$

چون طبق لم، برای هر $k\in\{0,1,\cdots,n\}$، هر یک از اعداد $F_n^{(2k)}(0)$ و $F_n^{(2k)}(1)$ یک عدد صحیح است ، لذا هر یک از اعداد $F_n(0)$ و $F_n(1)$ یک عدد صحیح می‌باشند و (الف) برقرار است.

مشتق‌پذیر بودن F_n و F_n' بر R ایجاب می‌کند که برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم:

$$\frac{d}{dx}[F_n'(x)\sin\pi x-\pi F_n(x)\cos\pi x]=[F_n''(x)+\pi^2F_n(x)]\sin\pi x \qquad (1)$$

از طرف دیگر، از این‌که f_n یک تابع چندجمله‌ای از درجه $2n$ است، برای هر عدد حقیقی x داریم $f^{(2n+2)}(x)=0$. بنابراین برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\begin{aligned}
F_n''(x)+\pi^2F_n(x) &= b^n\textstyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_n^{(2k+2)}(x)\pi^{(2n-2k)}+\\
&\quad +b^n\textstyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_n^{(2k)}(x)\pi^{(2n-2k+2)}\\
&= b^n\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f_n^{(2k+2)}(x)\pi^{(2n-2k)}+b^nf_n^{(0)}(x)\pi^{(2n+2)}+\\
&\quad +b^n\textstyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f_n^{(2k)}(x)\pi^{2n-2k+2}\\
&= b^n\textstyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} f_n^{(2k)}(x)\pi^{(2n-2k+2)}+\pi^2b^nf_n(x)\pi^{(2n)}-\\
&\quad -\textstyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(k-1)} f_n^{(2k)}(x)\pi^{(2n-2k+2)}\\
&= \pi^2b^nf_n(x)(\tfrac{a}{b})^n\\
&= \pi^2a^nf_n(x)
\end{aligned}$$

بنابراین برای هر عدد حقیقی x داریم

$$[F_n''(x)+\pi^2F_n(x)]\sin\pi x=\pi^2a^nf_n(x)\sin\pi x$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که (ب) برقرار است.

با توجه به (ب) داریم

$$\begin{aligned}
\pi a^n\textstyle\int_0^1 f_n(x)\sin\pi x dx &= \tfrac{1}{\pi}\{[F_n'(1)\sin\pi-\pi F_n(1)\cos\pi]-[F_n'(0)\sin 0-\pi F_n(0)\cos 0]\}\\
&= \tfrac{1}{\pi}[\pi F_n(1)+\pi F_n(0)]\\
&= F_n(1)+F_n(0)
\end{aligned}$$

پس (ج) برقرار است.

حال فرض می‌کنیم n یک عدد طبیعی باشد. چون برای هر $x \in (۰, ۱)$ داریم $\sin \pi x > ۰$ و طبق لم، $۰ < f_n(x) < \frac{۱}{\pi}$ پس برای هر $x \in (۰, ۱)$ داریم

$$۰ < f_n(x) \sin \pi x < \frac{۱}{\pi} \sin \pi x$$

لذا اولاً ادعا می‌کنیم

$$\int_۰^۱ f_n(x) \sin \pi x dx \;\; > \;\; ۰$$

(تابع حقیقی φ_n تابعی با ضابطهٔ $\varphi_n(x) = f_n(x) \sin \pi x$ یک تابع حقیقی پیوسته و نامنفی بر $[۰, ۱]$ است که در نقاط $(۰, ۱)$ مقادیرش مثبت است. پس $\int_۰^۱ \varphi_n(x) dx > ۰$ و ادعای ما برقرار است.)

و ثانیاً

$$\int_۰^۱ f_n(x) \sin \pi x dx \leq \frac{۱}{n!} \int_۰^۱ \sin \pi x dx = \frac{۱}{n!}(-\frac{۱}{\pi} \cos \pi + \frac{۱}{\pi} \cos ۰) = \frac{۲}{n! \, \pi}$$

پس با توجه به (ج) داریم

$$۰ < F_n(۱) + F_n(۰) < \frac{۲a^n}{n!}$$

از این‌که $\frac{۲a^n}{n!} \to ۰$ وقتی $n \to ۰$، نتیجه می‌شود که عددی طبیعی مانند N وجود دارد طوری که $\frac{۲a^N}{N!} < ۱$. بنابراین عددی طبیعی مانند N هست که

$$۰ < F_n(۱) + F_n(۰) < ۱ \quad (*)$$

از طرف دیگر با توجّه به (الف)، $۰ < F_n(۱) + F_n(۰) < ۱$ عددی صحیح است که این با $(*)$ تناقض دارد، پس فرض خلف باطل، و حکم برقرار است.

تهیه شده توسط فارسی‌تک

محمدرضا مجیدی

$http://engmmajidee.blogfa.com$